Índice

Teste de Autoavaliação 1

1. $A\hat{C}B = 180° - B\hat{A}C - A\hat{B}C = 180° - 68° - 50° = 62°$.

Atendendo à lei dos senos, tem-se: $\frac{\sin 62°}{5} = \frac{\sin 50°}{\overline{AC}} = \frac{\sin 68°}{\overline{BC}}$.

Da aplicação da lei dos senos, resulta:

$$\frac{\sin 62°}{5} = \frac{\sin 50°}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{5\sin 50°}{\sin 62°} \Leftrightarrow \overline{AC} \approx 4{,}3 .$$

A opção correta é a **(D)**.

2. Atendendo à lei dos senos, tem-se: $\frac{\sin 108°}{5} = \frac{\sin A\hat{B}C}{\overline{AC}} = \frac{\sin A\hat{C}B}{4}$.

Da aplicação da lei dos senos, resulta:

$$\frac{\sin 108°}{5} = \frac{\sin A\hat{C}B}{4} \Leftrightarrow \sin A\hat{C}B = \frac{4\sin 108°}{5} \Leftrightarrow \sin A\hat{C}B \approx 0{,}760845 .$$

Recorrendo a uma calculadora, obtém-se $A\hat{C}B \approx 49{,}5°$.

A opção correta é a **(B)**.

3. Por aplicação da lei dos cossenos ao triângulo $[ABC]$, tem-se:

$$\left(\overline{BC}\right)^2 = 42^2 + 27^2 - 2\times 42\times 27\times \cos 73° \Leftrightarrow \left(\overline{BC}\right)^2 \approx 1829{,}900974 .$$

Como $\overline{BC} > 0$, conclui-se que $\overline{BC} \approx 42{,}8$.

A opção correta é a **(A)**.

4. Sabe-se que ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.

Então, $B\hat{A}C = (180° - 110°) - 45° = 25°$.

Atendendo à lei dos senos, tem-se: $\frac{\sin 45°}{8} = \frac{\sin 25°}{\overline{BC}} = \frac{\sin 110°}{\overline{AC}}$.

Da aplicação da lei dos senos, resulta:

$$\frac{\sin 45°}{8} = \frac{\sin 25°}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{8\sin 25°}{\sin 45°} \Leftrightarrow \overline{BC} \approx 4{,}78138 .$$

$$P_{[ABCD]} = 2\overline{AB} + 2\overline{BC} \approx 2\times 8 + 2\times 4{,}78138 \approx 25{,}6 .$$

5.

5.1. Da aplicação da lei dos senos ao triângulo $[ABC]$, resulta:

$$\frac{\sin 90°}{51} = \frac{\sin 35°}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{51\sin 35°}{\sin 90°} \Leftrightarrow \overline{BC} \approx 29{,}25 \text{ m} .$$

A altura do triângulo em relação ao lado com 30 m de comprimento é, aproximadamente, igual a 29,25 m.

5.2. $A_{\text{terreno}} = \dfrac{30 \times \overline{BC}}{2} = 15 \times \overline{BC} \approx 438,75 \text{ m}^2$.

O preço do terreno por metro quadrado é 15 €.

$438,75 \times 15 \text{ €} = 6581,25 \text{ €}$.

O Sr. Silva pagou 6581 euros pelo terreno.

5.3. Por aplicação da lei dos cossenos ao triângulo $[ABD]$, tem-se:

$\left(\overline{BD}\right)^2 = 30^2 + 51^2 - 2 \times 30 \times 51 \times \cos 35° \Leftrightarrow \left(\overline{BD}\right)^2 \approx 994,39474$.

Como $\overline{BD} > 0$, conclui-se que $\overline{BD} \approx 32$ m .

$P_{[ABD]} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{AD} \approx 51 + 32 + 30 = 113$ m .

O terreno tem, aproximadamente, 113 m de perímetro.

Teste de Autoavaliação 2

1.

1.1. O eneágono regular está inscrito na circunferência, logo divide-a em 9 arcos geometricamente iguais.

A amplitude de cada um desses arcos é $360° : 9 = 40°$.

Como $1160° = 3 \times 360° + 80°$ e $80° = 2 \times 40°$, conclui-se que o lado extremidade do ângulo orientado que tem lado origem $\dot{O}A$ e amplitude $1160°$ é $\dot{O}C$.

A opção correta é a **(B)**.

1.2. Como $-240° = 6 \times (-40°)$, conclui-se que a imagem do ponto *H* pela rotação de centro *O* e amplitude $-240°$ é o ponto *B*.

A opção correta é a **(D)**.

2. Sabe-se que o ponto *A* tem coordenadas $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Como *B* é simétrico de *A* em relação ao eixo das ordenadas, então as suas coordenadas são $(-\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Como $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, então $\sin\alpha = -\sin(-\alpha)$.

Donde se conclui que as coordenadas do ponto *B* podem ser representadas por $(-\cos\alpha, -\sin(-\alpha))$.

A opção correta é a **(A)**.

3. Seja θ um ângulo generalizado representado no círculo trigonométrico e a um número real tal que $a \in]-1, 0[$.

Sabe-se que $\sin\theta = a$ e $\tan\theta > 0$.

Então, tem-se $\sin\theta < 0$ e $\tan\theta > 0$.

Logo, o lado extremidade de θ pertence ao 3.º quadrante.

A opção correta é a **(C)**.

4.

4.1. Como $1690° = 250° + 4 \times 360°$, sabe-se que o ângulo generalizado 1690° é representado por $(250°, 4)$.

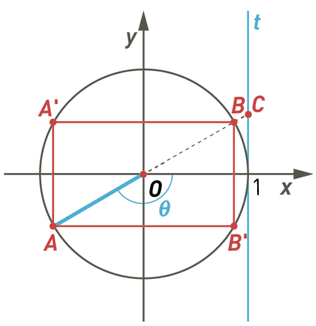
4.2. Como $-2570° = -50° - 7 \times 360°$, sabe-se que o ângulo generalizado $-2570°$ é representado por $(-50°, -7)$.

5.

5.1. Ora, $C\left(1, \tan(-150°)\right)$ e $\tan(-150°) = \tan(-150° + 180°) = \tan(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Assim sendo, $C\left(1, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

5.2. Na figura seguinte está representado o retângulo de lados paralelos aos eixos coordenados em que [*AB*] é uma das diagonais.



Sabe-se que $A\left(\cos(-150°), \sin(-150°)\right)$.

Como $\cos(-150°) = \cos(150°) = \cos(180° - 30°) = -\cos(30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e

$\sin(-150°) = -\sin(150°) = -\sin(180° - 30°) = -\sin(30°) = -\frac{1}{2}$, conclui-se que $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Como *A´*, *B* e *B´* são simétricos do ponto *A* em relação ao eixo das abcissas, à origem e ao eixo das ordenadas, respetivamente, tem-se:

$A'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $B'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

$\overline{BB'} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ e $\overline{BA'} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Área do retângulo: $\overline{BB'} \times \overline{BA'} = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

6.

6.1. Atendendo aos dados da figura, sabe-se que $\tan\alpha = \frac{3}{2}$.

$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{13}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{13}$.

Como $\alpha \in 1.^{\text{º}}Q$, $\cos\alpha > 0$. Então, conclui-se que $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$.

Donde se conclui que $\sin\alpha = \tan\alpha \times \cos\alpha = \frac{3}{2} \times \frac{2\sqrt{13}}{13} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$.

6.2. Atendendo aos dados da figura, sabe-se que $\sin\beta = -\frac{3}{5}$.

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\beta = 1 \Leftrightarrow \cos^2\beta = \frac{16}{25}$.

Como $\beta \in 4.^{\text{º}}Q$, $\cos\beta > 0$. Então, conclui-se que $\cos\beta = \frac{4}{5}$.

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}.$$

6.3. Sendo *C* o simétrico de *B* em relação à origem do referencial, tem-se $C\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Logo, $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ e $\tan\theta = \tan\beta = -\frac{3}{4}$.

Teste de Autoavaliação 3

1. O pentágono regular [*ABCDE*] inscrito na circunferência divide-a em 5 arcos geometricamente iguais.

Então, $C\hat{O}D = \frac{2\pi}{5}$ rad $\approx 1{,}26$ rad .

A opção correta é a **(C)**.

2. Como $\overline{AC} = \overline{BC}$, conclui-se que $B\hat{A}C = A\hat{B}C$.

Como a soma das amplitudes, em radianos, dos ângulos internos de um triângulo é igual a π , tem-se:

$$B\hat{A}C + A\hat{B}C = \pi - \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow 2B\hat{A}C = \frac{4\pi}{5} \Leftrightarrow B\hat{A}C = \frac{2\pi}{5} .$$

A opção correta é a **(A)**.

3. Se $x \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$, então $2x \in \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$.

Logo, $\sin x > 0$ e $\cos(2x) < 0$.

Então, $\forall x \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(2x) . \sin x < 0$.

A opção correta é a **(C)**.

4. $3\sin(-x) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow -3\sin x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

A equação tem exatamente duas soluções no intervalo $\left]\frac{\pi}{6}, \pi\right[$.

A opção correta é a **(D)**.

5. $\text{Área}_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OC}}{2}$.

Então, $f(\alpha) = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$.

A opção correta é a **(B)**.

6. $\text{Área}_{[OABC]} = \text{Área}_{[ABC]} - \text{Área}_{[AOB]}$.

Seja *M* o ponto médio de [*AB*].

$$\text{Área}_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{MC}}{2} = \frac{2\cos\theta \times (1 + \sin\theta)}{2} = \cos\theta + \cos\theta \sin\theta .$$

$$\text{Área}_{[AOB]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{MO}}{2} = \frac{2\cos\theta \times \sin\theta}{2} = \cos\theta \sin\theta .$$

Então, $f(\theta) = \cos\theta + \cos\theta \sin\theta - \cos\theta \sin\theta = \cos\theta$.

7.

7.1. $\forall x \in D_f$, $f(x + 4\pi) = 4\sin\left(\frac{x + 4\pi}{2}\right) = 4\sin\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) = 4\sin\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$.

Então, *f* é uma função periódica de período 4π .

7.2. O contradomínio da função seno é $[-1, 1]$.

O gráfico da função *f* obtém-se a partir do gráfico da função seno através de uma dilatação horizontal de coeficiente 2 seguida de uma dilatação vertical de coeficiente 4.

Então, conclui-se que $D'_f = [-4, 4]$.

7.3. $f(x)=-\sqrt{12} \Leftrightarrow 4\sin\left(\frac{x}{2}\right)=-2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \vee \quad \frac{x}{2}=\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=-\frac{2\pi}{3}+4k\pi \quad \vee \quad x=\frac{8\pi}{3}+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

8. $3\tan(\pi-x)+\tan^3 x=0 \Leftrightarrow -3\tan x+\tan^3 x=0 \Leftrightarrow \tan x\left(-3+\tan^2 x\right)=0 \Leftrightarrow \tan x=0 \ \vee\ -3+\tan^2 x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan x=0 \ \vee\ -3+\tan^2 x=0 \Leftrightarrow \tan x=0 \ \vee\ \tan^2 x=3 \Leftrightarrow \tan x=0 \ \vee\ \tan x=\sqrt{3} \ \vee\ \tan x=-\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan x=\tan 0 \ \vee\ \tan x=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \ \vee\ \tan x=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=k\pi \quad \vee \quad x=\frac{\pi}{3}+k\pi \quad \vee \quad x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

9.

9.1. Recorrendo à calculadora, sabe-se que $\arccos(0,07)\approx 1,50$ rad.

9.2. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \cos x=\sin(2x) \Leftrightarrow \cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}-2x+2k\pi \quad \vee \quad x=-\frac{\pi}{2}+2x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 3x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad \vee \quad -x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3} \quad \vee \quad x=\frac{\pi}{2}-2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Como $x\in[0,\pi]$, tem-se $x\in\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right\}$.

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ e $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Como *A* e *B* são pontos de interseção dos dois gráficos e têm ordenadas não nulas, conclui-se que $A\left(\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $B\left(\frac{5\pi}{6},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Então, $\overline{AB}=\sqrt{\left(\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{2\pi}{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{4\pi^2}{9}+3}=\sqrt{\frac{4\pi^2+27}{9}}=\frac{\sqrt{4\pi^2+27}}{3}$.

Teste de Autoavaliação 4

1.

1.1. Como $\left[ABCD\right]$ é um retângulo, sabe-se que $B\hat{A}D = 90°$.

Inclinação da reta AB: $180° - 90° - 60° = 30°$.

A opção correta é a **(B)**.

1.2. Como $\left[ABCD\right]$ é um retângulo, sabe-se que as retas *BC* e *AD* são paralelas.

Então, $m_{BC} = m_{AD} = \tan\left(180° - 60°\right) = -\tan\left(-60°\right) = -\sqrt{3}$.

A reta *BC* interseta o eixo *Oy* no ponto de ordenada 8, logo a equação reduzida da reta *BC* é:

$y = -\sqrt{3}x + 8$.

A opção correta é a **(A)**.

2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{DC}.\left(-\overrightarrow{PM}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{PM} = -\overline{DC}\times\overline{DP} = -4\times 2 = -8$.

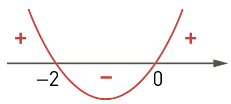
A opção correta é a **(D)**.

3. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam um ângulo obtuso então tem-se $\vec{u}.\vec{v} < 0$.

$\vec{u}.\vec{v} < 0 \Leftrightarrow \left(1,k\right).\left(k,k+1\right) < 0 \Leftrightarrow 1\times k + k\times\left(k+1\right) < 0 \Leftrightarrow k^2 + 2k < 0 \Leftrightarrow k \in \left]-2,0\right[$.

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$k^2 + 2k = 0 \Leftrightarrow k\left(k+2\right) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = -2$.



A opção correta é a **(C)**.

4.

4.1. Como [*ABCD*] é um paralelogramo, então $B\hat{A}D = 180° - 120° = 60°$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 6\times 4\times\cos\left(60°\right) = 24\times\frac{1}{2} = 12$.

4.2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \left(\overline{AB}\right)^2 + 12 = 6\times 6 + 12 = 48$.

5.

5.1. $C = D + \overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = \left(2,-1\right) - \left(3,2\right) = \left(-1,-3\right)$.

Então, $C = \left(6,\ 3\right) + \left(-1,\ -3\right) = \left(5,\ 0\right)$.

5.2. $\cos\left(\overrightarrow{BA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BC}\right) = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BC}\right\|} = \frac{\left(1,3\right).\left(3,1\right)}{\sqrt{1^2+3^2}\times\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{3+3}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Recorrendo à calculadora, tem-se $\left(\overrightarrow{BA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BC}\right) \approx 53{,}1°$.

Como num paralelogramo os ângulos opostos são iguais e os ângulos consecutivos são suplementares, conclui-se que $C\hat{B}A = A\hat{D}C \approx 53{,}1°$ e $D\hat{A}D = C\hat{D}B \approx 126{,}9°$.

6.

6.1. A reta *t* é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano que satisfazem a condição $\overrightarrow{TC} \cdot \overrightarrow{TP} = 0$.

$\overrightarrow{TC} = C - T = (-2,1) - (1,-1) = (-3,2)$ e $\overrightarrow{TP} = P - T = (x,y) - (1,-1) = (x-1, y+1)$.

$\overrightarrow{TC} \cdot \overrightarrow{TP} = 0 \Leftrightarrow (-3,2).(x-1,y+1) = 0 \Leftrightarrow -3x+3+2y+2=0 \Leftrightarrow 2y = 3x-5 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$.

6.2. O lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que $\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$, sendo *M* o ponto médio de [*CT*] é a mediatriz do segmento de reta [*CT*].

As coordenadas do ponto *M*, ponto médio de [*CT*], são: $\left(\frac{-2+1}{2}, \frac{1-1}{2}\right)$, ou seja, $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

$\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{MP} = 0 \Leftrightarrow (3,-2).\left(x+\frac{1}{2}, y-0\right) = 0 \Leftrightarrow 3x + \frac{3}{2} - 2y = 0 \Leftrightarrow 2y = 3x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$.

A mediatriz do segmento de reta [*CT*] que é definida pela equação $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$.

*** 7.** Sendo *a* o volume do cubo, sabe-se que $\overline{AB} = \sqrt[3]{a}$.

Como *C* é a projeção ortogonal de *P* sobre *AC*, tem-se:

$\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{AP} = \overline{AC} \times \overline{AC} = \left(\overline{AC}\right)^2 = \left(\overline{AB}\right)^2 + \left(\overline{BC}\right)^2 = 2\left(\overline{AB}\right)^2 = 2\left(\sqrt[3]{a}\right) = 2\sqrt[3]{a^2}$.

Teste de Autoavaliação 5

1. Um vetor normal ao plano α é, por exemplo, $\vec{u}=(-2,1,1)$.

A reta *AB* é perpendicular ao plano α definido pela equação $-2x+y+z-5=0$.

Então, qualquer vetor com a direção da reta *AB* é colinear com o vetor $\vec{u}=(-2,1,1)$.

O vetor de coordenadas $\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ é colinear com $\vec{u}=(-2,1,1)$.

A opção correta é a **(B)**.

2. O conjunto de pontos $P(x,y,z)$ que satisfazem a condição $\overrightarrow{AP}\,.\,\overrightarrow{BP}=0$ é a superfície esférica de diâmetro [*AB*].

O centro da superfície esférica é o ponto $M(-1,1,0)$ e o raio é $\frac{1}{2}\overline{AB}$, ou seja, 2.

Uma equação dessa superfície esférica é $(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=4$.

A opção correta é a **(D)**.

3. Os pontos *A*, *B* e C não definem um plano se forem colineares, ou seja, se, por exemplo, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ forem colineares.

$\overrightarrow{AB}=B-A=(-2,0,1)-(1,2,-1)=(-3,-2,2)$ e $\overrightarrow{AC}=C-A=\left(\frac{5}{2},3,k\right)-(1,2,-1)=\left(\frac{3}{2},1,k+1\right)$.

Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são colineares se:

$$\frac{\frac{3}{2}}{-3}=\frac{1}{-2}=\frac{k+1}{2}\Leftrightarrow\frac{k+1}{2}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow k+1=-1\Leftrightarrow k=-2\,.$$

A opção correta é a **(A)**.

4. $\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\vec{n}_\alpha\perp\vec{n}_\beta\Leftrightarrow\vec{n}_\alpha.\vec{n}_\beta=0\Leftrightarrow(1,-3,2).(2,-k,1)=0\Leftrightarrow 2+3k+2=0\Leftrightarrow k=-\frac{4}{3}$.

A opção correta é a **(C)**.

5.

5.1. Uma equação do plano β é do tipo $-2x+y+3z+d=0$.

Como plano β passa por $A(1,-2,1)$, tem-se: $-2\times1+(-2)+3\times1+d=0\Leftrightarrow d=1$.
Uma equação cartesiana do plano β é: $-2x+y+3z+1=0$.

5.2. Uma equação vetorial da reta *r* é $(x,y,z)=(1,-2,1)+k(-2,1,3),\ k\in\mathbb{R}$.

Seja *I* o ponto de interseção da reta *r* com o plano α.

Sendo *I* um ponto da reta *r*, é da forma $(1-2k,-2+k,1+3k),\ k\in\mathbb{R}$.

Como *I* pertence ao plano α definido pela equação $3x+y-2z=2$, tem-se:

$$3(1-2k)+(-2+k)-2(1+3k)=2\Leftrightarrow 3-6k-2+k-2-6k=2\Leftrightarrow -11k=3\Leftrightarrow k=-\frac{3}{11}\,.$$

Então, $I\left(\frac{17}{11},-\frac{25}{11},\frac{2}{11}\right)$.

5.3. A superfície esférica tem centro em $A(1,-2,1)$ e é tangente ao plano de equação $x=-2$.

Então, o raio dessa superfície esférica é $|-2-1|=3$.

Uma equação dessa superfície esférica, na forma reduzida, é $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$.

6.

6.1. Os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ são dois vetores não colineares do plano *ABC*.

$\vec{AB}=B-A=(3,-1,1)-(2,-1,0)=(1,0,1)$ e $\vec{AC}=C-A=(-1,1,2)-(2,-1,0)=(-3,2,2)$.

O plano *ABC* pode ser definido pelo conjunto dos pontos *P* tais que $P=A+a\vec{AB}+b\vec{AC}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Uma equação vetorial do plano *ABC* é:

$(x,y,z)=(2,-1,0)+a(1,0,1)+b(-3,2,2)$, $a,b\in\mathbb{R}$.

6.2. O centro da esfera é o ponto médio de [*BC*].

As coordenadas do ponto médio de [*BC*], são: $\left(\frac{3-1}{2},\frac{-1+1}{2},\frac{1+2}{2}\right)$, ou seja, $\left(1,0,\frac{3}{2}\right)$.

Diâmetro da esfera: $\overline{BC}=\sqrt{(3+1)^2+(-1-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{16+4+1}=\sqrt{21}$.

Raio da esfera: $r=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

A esfera de diâmetro [*BC*] é definida pela inequação $(x-1)^2+y^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2\leq\frac{21}{4}$.

7. O vértice *A* pertence ao semieixo positivo *Oz*, então $A(0,0,z)$, $z>0$.

Como *A* pertence ao plano *ABV*, definido pela equação $y+3z-12=0$, tem-se:

$0+3z-12=0\Leftrightarrow z=4$.

Assim sendo, a base da pirâmide é um quadrado de lado 4.

$V_{\text{pirâmide}}=\frac{1}{3}A_b\times h\Leftrightarrow 32=\frac{1}{3}\times 4^2\times h\Leftrightarrow h=6$.

A projeção ortogonal do vértice V sobre a base é o centro da mesma, de coordenadas $(2,0,2)$.

Como a altura da pirâmide é 6 e a base está contida no plano *xOz*, conclui-se que $V(2,6,2)$.

8. Seja *r* a reta que passa por *A* e é perpendicular ao plano α.

Uma equação vetorial da reta *r* é $(x,y,z)=(-1,2,-1)+k(1,-1,2)$, $k\in\mathbb{R}$.

B é o ponto de interseção da reta *r* com o plano α.

Sendo *B* um ponto da reta *r*, é da forma $(-1+k,2-k,-1+2k)$, $k\in\mathbb{R}$.

Como *B* pertence ao plano α definido pela equação $x-y+2z-1=0$, tem-se:

$-1+k-(2-k)+2(-1+2k)-1=0\Leftrightarrow -1+k-2+k-2+4k-1=0\Leftrightarrow 6k=6\Leftrightarrow k=1$.

Então, $B(0,1,1)$.

$\vec{AB}=B-A=(0,1,1)-(-1,2,-1)=(1,-1,2)$ e $\vec{AC}=C-A=(1,2,1)-(-1,2,-1)=(2,0,2)$.

$\vec{AB}.\vec{AC}=(1,-1,2).(2,0,2)=2+0+4=6$.

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}=\frac{6}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\times\sqrt{2^2+0^2+2^2}}=\frac{6}{\sqrt{6}\times\sqrt{8}}=\frac{6}{\sqrt{48}}=\frac{6}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Recorrendo à calculadora, tem-se:

$\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AC}=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=30°$.

Teste de Autoavaliação 6

1. As sucessões representadas em **(A)** e em **(B)** não são crescentes.

As sucessões representadas em **(C)** e em **(D)** são crescentes.

(C) : $u_5 = \frac{5^2-4}{7} = 3$.

(D) : $u_5 = 2\times 5 - 1 = 9$.

A opção correta é a **(C)**.

2. $u_{n+1} - u_n = 0 \Leftrightarrow n^2 - 5n = 0 \Leftrightarrow n(n-5) = 0 \Leftrightarrow n = 0 \vee n = 5 \underset{n\in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} n = 5$ **.**

Então, sabe-se que $u_{5+1} - u_5 = 0 \Leftrightarrow u_6 = u_5$.

A opção correta é a **(B)**.

3. $u_{n+1} - u_n = \frac{5(n+1)}{n+1+1} - \frac{5n}{n+1} = \frac{5n+5}{n+2} - \frac{5n}{n+1} = \frac{(5n+5)(n+1) - 5n(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$

$= \frac{5n^2+5n+5n+5-5n^2-10n}{(n+2)(n+1)} = \frac{5}{(n+2)(n+1)}$.

O denominador é positivo, qualquer que seja o valor de *n*, e o numerador também é positivo.

Então, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n > 0$, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$.

A sucessão (u_n) é monótona crescente.

Como a sucessão (u_n) é monótona crescente, sabe-se que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_1$.

Ora, $u_1 = \frac{5\times 1}{1+1} = \frac{5}{2}$.

Então, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \frac{5}{2}$.

Por outro lado, sabe-se que $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = 5 - \frac{5}{n+1}$.

Como $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{5}{n+1} > 0$, sabe-se que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 5$.

Assim sendo, a sucessão (u_n) é limitada porque $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{5}{2} \leq u_n < 5$ **.**

A opção correta é a **(D)**.

4. As sucessões representadas em **(A)** e em **(C)** não são limitadas pois não são majoradas.

A sucessão representada em **(D)** não é limitada pois não é minorada nem majorada.

A sucessão representada em **(B)** é limitada.

Se $n \leq 10$, então tem-se: $1 \leq n \leq 10 \Leftrightarrow 1 \leq n^3 \leq 1000$.

Se $n > 10$, então tem-se: $\frac{11}{6} \leq \frac{2n}{n+1} < 2$.

Conclui-se, então, que a sucessão é limitada.

A opção correta é a **(B)**.

5. A afirmação da opção **(A)** é verdadeira. Se a sucessão for monótona crescente então é minorada (o primeiro termo é um minorante) e se for monótona crescente então é majorada (o primeiro termo é um majorante).

A afirmação da opção **(B)** é falsa. Por exemplo, a sucessão de termo geral $u_n = -\frac{1}{n}$ é monótona crescente e é majorada $(\forall n \in IN,\ u_n < 0)$.

A afirmação da opção **(C)** é falsa. Por exemplo, a sucessão de termo geral $a_n = (-1)^n$ é minorada porque $\forall n \in IN,\ -1 \leq a_n \leq 1$ e não é crescente.

A afirmação da opção **(D)** é falsa. Por exemplo, a sucessão de termo geral $b_n = \frac{1}{n}$ é monótona decrescente e não tem termos negativos.

A opção correta é a **(A)**.

6.

6.1. $v_n = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{3n-1}{n+2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 6n-2 = 5n+10 \Leftrightarrow n = 12$.

Conclusão: $\frac{5}{2}$ é o termo de ordem 12 da sucessão (v_n).

6.2. $v_n > 2{,}8 \Leftrightarrow \frac{3n-1}{n+2} > 2{,}8 \Leftrightarrow 3n-1 > 2{,}8n+5{,}6 \Leftrightarrow 0{,}2n > 6{,}6 \Leftrightarrow n > 33$.

O termo de menor ordem que é maior que 2,8 é: $v_{34} = \frac{3\times 34-1}{34+2} = \frac{101}{36}$.

6.3. $v_{n+1} - v_n = \frac{3(n+1)-1}{n+1+2} - \frac{3n-1}{n+2} = \frac{3n+2}{n+3} - \frac{3n-1}{n+2} = \frac{(3n+2)(n+2)-(3n-1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} =$

$= \frac{3n^2+6n+2n+4-3n^2-9n+n+3}{(n+3)(n+2)} = \frac{7}{(n+3)(n+2)}$.

O denominador é positivo, qualquer que seja o valor de n, e o numerador também é positivo.

Então, $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n > 0$, ou seja, $\forall n \in IN,\ v_{n+1} > v_n$.

A sucessão (v_n) é monótona crescente.

6.4. Recorrendo ao algoritmo da divisão tem-se:

$$\begin{array}{rl} 3n-1 & \underline{|\ n+2} \\ \underline{-3n-6} & \ 3 \\ -7 & \end{array}$$

Donde se conclui que $\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = 3 - \frac{7}{n+2}$.

Como $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{7}{n+2} > 0$, sabe-se que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n < 3$.

Assim sendo, 3 é majorante do conjunto dos termos da sucessão (v_n).

7.

7.1. Se $n<7$, tem-se:

$$u_n=2\Leftrightarrow\frac{n^2-2n}{3}=2\Leftrightarrow n^2-2n-6=0\Leftrightarrow n=\frac{2\pm\sqrt{28}}{2}\Leftrightarrow n=1+\sqrt{7}\ \vee\ n=1-\sqrt{7}\ .$$

Como *n* é natural, conclui-se que nenhum dos seis primeiros termos da sucessão (u_n) é igual a 2.

Se $n\geq 7$, tem-se:

$$u_n=2\Leftrightarrow\frac{3n-5}{2}=2\Leftrightarrow 3n-5=4\Leftrightarrow n=3\ .$$

O que é impossível pois consideramos que $n\geq 7$.

Conclusão: 2 não é termo da sucessão.

7.2. Se $n<7$, tem-se:

$$u_n=8\Leftrightarrow\frac{n^2-2n}{3}=8\Leftrightarrow n^2-2n-24=0\Leftrightarrow n=\frac{2\pm\sqrt{100}}{2}\Leftrightarrow n=6\ \vee\ n=-4\ .$$

Como *n* é natural, conclui-se que $n=6$.

Se $n\geq 7$, tem-se:

$$u_n=8\Leftrightarrow\frac{3n-5}{2}=8\Leftrightarrow 3n-5=16\Leftrightarrow n=7\ .$$

Conclusão: $u_6=u_7=8$.

7.3. $\forall n<6,\ u_{n+1}-u_n=\frac{(n+1)^2-2(n+1)}{3}-\frac{n^2-2n}{3}=\frac{n^2+2n+1-2n-2-n^2+2n}{3}=\frac{2n-1}{3}$.

$u_7-u_6=8-8=0$.

$\forall n\geq 7,\ u_{n+1}-u_n=\frac{3(n+1)-5}{2}-\frac{3n-5}{2}=\frac{3n+3-5-3n+5}{2}=\frac{3}{2}$.

A sucessão (u_n) é crescente em sentido lato porque $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n\geq 0$.

8.

8.1.

a) $u_{n+1}-u_n=\frac{5(n+1)-3}{n+1+1}-\frac{5n-3}{n+1}=\frac{5n+2}{n+2}-\frac{5n-3}{n+1}=\frac{(5n+2)(n+1)-(5n-3)(n+2)}{(n+2)(n+1)}=$

$$=\frac{5n^2+5n+2n+2-5n^2-10n+3n+6}{(n+2)(n+1)}=\frac{8}{(n+2)(n+1)}\ .$$

O denominador é positivo, qualquer que seja o valor de *n*, e o numerador também é positivo.

Então, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n>0$, ou seja, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}>u_n$.

A sucessão (u_n) é monótona crescente.

b) Recorrendo ao algoritmo da divisão tem-se:

$$\begin{array}{r|l} 5n-3 & n+1 \\ \cline{2-2} \underline{-5n-5} & 5 \\ -8 & \end{array}$$

Donde se conclui que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 5 - \frac{8}{n+1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 < \frac{8}{n+1} \leq 4$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \ 0 > -\frac{8}{n+1} \geq -4$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \ 5 > 5 - \frac{8}{n+1} \geq 1$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \ 1 \leq u_n < 5$

Assim sendo, a sucessão (u_n) é limitada.

c) A sucessão (v_n) não é limitada porque não é majorada.

Vamos provar que a sucessão não é majorada, ou seja, qualquer que seja o número real M, este não é majorante.

Pretende-se provar que $\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists p \in \mathbb{N}: \quad v_p > M$.

$v_p > M \Leftrightarrow \sqrt{7p-5} > M \Leftrightarrow 7p-5 > M^2 \Leftrightarrow 7p > M^2 + 5 \Leftrightarrow p > \frac{M^2+5}{7}$.

Pode tomar-se para p qualquer número natural que seja maior que $\frac{M^2+5}{7}$. Neste caso tem-se $v_p > M$.

Daqui resulta que M não é majorante da sucessão (v_n).

Então, a sucessão (v_n) não é majorada.

8.2. $v_3 = \sqrt{7 \times 3 - 5} = 4$.

$u_n = v_3 \Leftrightarrow u_n = 4 \Leftrightarrow \frac{5n-3}{n+1} = 4 \Leftrightarrow 5n-3 = 4n+4 \Leftrightarrow n = 7$.

Existe um termo da sucessão (u_n) que é igual a v_3, é o termo de ordem 7.

8.3. $v_n = n+1 \Leftrightarrow \sqrt{7n-5} = n+1 \Leftrightarrow 7n-5 \geq 0 \ \wedge \ n+1 \geq 0 \ \wedge \ 7n-5 = (n+1)^2$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{5}{7} \ \wedge \ n \geq -1 \ \wedge \ 7n-5 = n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \ \wedge \ n^2 - 5n + 6 = 0$

$\Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \ \wedge \ n = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \ \wedge \ (n = 3 \ \vee \ n = 2) \Leftrightarrow n = 3 \ \vee \ n = 2$.

Os termos da sucessão (v_n) tais que $v_n = n+1$ são $v_2 = \sqrt{7 \times 2 - 5} = 3$ e $v_3 = 4$.

Teste de Autoavaliação 7

1. $u_9 = 2u_8 + 3 \Leftrightarrow 765 = 2u_8 + 3 \Leftrightarrow u_8 = 381$.

$u_8 = 2u_7 + 3 \Leftrightarrow 381 = 2u_7 + 3 \Leftrightarrow u_7 = 189$.

A opção correta é a **(A)**.

2. Os três primeiros termos da sucessão representada em **(A)** são 3, 9 e 27.

Os três primeiros termos da sucessão representada em **(B)** são 5, 11 e 17.

Os primeiros termos da sucessão representada em **(C)** são 2, 4, 8 e 16.

Os três primeiros termos da sucessão representada em **(D)** são 7, 3 e –1.

Como na figura estão representadas 15 bolas numeradas de 1 a 15, excluem-se as opções **(A)**, **(B)** e **(D)**.

A opção correta é a **(C)**.

3. Sendo (a_n) uma progressão aritmética de razão *r*, sabe-se que:

$a_{20} = a_{10} + 10r \Leftrightarrow 58 = 28 + 10r \Leftrightarrow r = 3$.

Então, $a_{15} = a_{10} + 5r = 28 + 5 \times 3 = 43$.

A opção correta é a **(B)**.

4. $u_n \notin A \Leftrightarrow u_n \notin \left]4{,}99\,;5{,}01\right[\Leftrightarrow |u_n - 5| \geq 0{,}01 \Leftrightarrow \left|\frac{5n}{n+1} - 5\right| \geq 0{,}01 \Leftrightarrow \frac{5}{n+1} \geq \frac{1}{100} \Leftrightarrow n+1 \leq 500 \Leftrightarrow n \leq 499$.

Há 499 termos da sucessão (u_n) que não pertencem ao intervalo $\left]4{,}99\,;5{,}01\right[$.

A opção correta é a **(D)**.

5. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2n^3 + 5n^2 - 7$.

Como $\lim \frac{u_n}{v_n} = -\frac{1}{2}$, sabe-se que $v_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ e que $\frac{2}{a} = -\frac{1}{2}$.

$\frac{2}{a} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -4$.

Então, $\lim (v_n) = -\infty$.

A opção correta é a **(B)**.

6.

6.1. $w_n \in V_{0{,}025}(3) \Leftrightarrow |w_n - 3| < 0{,}025 \Leftrightarrow \left|\frac{3n-1}{n+1} - 3\right| < 0{,}025 \Leftrightarrow \frac{4}{n+1} < 0{,}025 \Leftrightarrow n+1 > 160 \Leftrightarrow n > 159$.

Os termos da sucessão (w_n) pertencem à vizinhança $V_{0{,}025}(3)$ a partir da ordem 160 (inclusive).

6.2. Pretende-se mostrar, por definição de limite, que $\lim w_n = 3$.

Vamos verificar que para todo o $\delta > 0$ existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq p \Rightarrow |w_n - 3| < \delta$.

$|w_n - 3| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{3n-1}{n+1} - 3\right| < \delta \Leftrightarrow \frac{4}{n+1} < \delta \Leftrightarrow n+1 > \frac{4}{\delta} \Leftrightarrow n > \frac{4-\delta}{\delta}$.

Basta considerar *p* o menor número natural que é maior que $\frac{4-\delta}{\delta}$.

7.

7.1. Seja r a razão da progressão aritmética (u_n).

$$u_3 = u_1 + (3-1)r \Leftrightarrow 12 = u_1 + 2r \Leftrightarrow u_1 = 12 - 2r$$

$$S_{20} = 990 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20 = 990 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + 19r = 99 \Leftrightarrow 24 - 4r + 19r = 99 \Leftrightarrow 15r = 7 \Leftrightarrow r = 5 .$$

Então, tem-se:

$$u_n = u_3 + (n-3)r \Leftrightarrow u_n = 12 + 5n - 15 \Leftrightarrow u_n = 5n - 3 .$$

7.2. $u_n > 100 \wedge u_n < 250 \Leftrightarrow 5n - 3 > 100 \wedge 5n - 3 < 250 \Leftrightarrow n > 20{,}6 \wedge n < 50{,}6$.

A sucessão tem 30 termos superiores a 100 e inferiores a 250. A soma desses termos é:

$$S = \sum_{i=21}^{50} u_i = \frac{u_{21} + u_{50}}{2} \times 30 = \frac{102 + 247}{2} \times 30 = 5235 .$$

8.

8.1. Pretende-se mostrar, por indução matemática, que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \pi \times 4^{3-n}$.

- Se $n = 1$, $a_1 = \pi \times 4^{3-1} \Leftrightarrow 16\pi = \pi \times 4^2$ (proposição verdadeira).
- <u>Hipótese de indução</u>: $a_p = \pi \times 4^{3-p}$ (admite-se verdadeira).
- <u>Tese</u>: $a_{p+1} = \pi \times 4^{3-(p+1)}$ (o que se pretende mostrar).

Ora, $a_{p+1} = \dfrac{a_p}{4} = \dfrac{\pi \times 4^{3-p}}{4} = \pi \times 4^{3-p-1} = \pi \times 4^{3-(p+1)}$.

Como a condição $a_n = \pi \times 4^{3-n}$ é verdadeira para $n = 1$ e é hereditária, conclui-se que a condição $a_n = \pi \times 4^{3-n}$ é universal em IN, ou seja, a condição $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \pi \times 4^{3-n}$ é verdadeira.

8.2. (a_n) é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{4}$ e primeiro termo igual a 16π .

$$S_n = a_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} = 16\pi \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = 16\pi \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = 16\pi \times \frac{4}{3} \times \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = \frac{64\pi}{3} \times \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right].$$

$$\lim S_n = \lim \left[\frac{64\pi}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)\right] = \frac{64\pi}{3} \times (1 - 0) = \frac{64\pi}{3} .$$

9.

9.1. $$\lim (u_n \times v_n) = \lim \left(\frac{2n^2 - 3n}{n+5} \times \frac{5}{n+2}\right) = \lim \frac{10n^2 - 15n}{n^2 + 7n + 10} = \lim \frac{n^2\left(10 - \frac{15}{n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{7}{n} + \frac{10}{n^2}\right)} = \lim \frac{10 - \frac{15}{n}}{1 + \frac{7}{n} + \frac{10}{n^2}} = \frac{10 - 0}{1 + 0 + 0} = 10 .$$

9.2. $$\lim \frac{w_n}{3n+1} = \lim \frac{\sqrt{5 + n^2} + n}{3n+1} = \lim \frac{\sqrt{n^2\left(\frac{5}{n^2} + 1\right)} + n}{3n+1} = \lim \frac{n\sqrt{\frac{5}{n^2} + 1} + n}{3n+1} =$$

$$= \lim \frac{n\left(\sqrt{\frac{5}{n^2} + 1} + 1\right)}{n\left(3 + \frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{\sqrt{\frac{5}{n^2} + 1} + 1}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{0 + 1} + 1}{3 + 0} = \frac{2}{3} .$$

Teste de Autoavaliação 8

1. $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^3-4x}{x+2}=0 \Leftrightarrow x^3-4x=0 \ \wedge \ x+2\neq 0$.

$x^3-4x=0 \Leftrightarrow x(x^2-4)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2-4=0 \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=-2 \ \vee \ x=2$.

$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow (x=-2 \ \vee \ x=0 \ \vee \ x=2) \ \wedge \ x\in \mathbb{R}\setminus\{-2\} \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=2$.

A função *f* tem exatamente dois zeros: 0 e 2.

A opção correta é a **(C)**.

2. $D_g=\{x\in\mathbb{R}: \ x^2-1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$.

$x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-1$.

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)=\frac{x}{x^2-1}$	$-$	S.S.	$+$	0	$-$	S.S.	$+$

$g(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]0,1\right[$.

A opção correta é a **(C)**.

3. A abcissa do ponto *A* corresponde ao zero negativo da função *f*.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^4+8x}{3x^2+1}=0 \Leftrightarrow x^4+8x=0 \ \wedge \ 3x^2+1\neq 0$.

$x^4+8x=0 \Leftrightarrow x(x^3+8)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^3+8=0 \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=\sqrt[3]{-8} \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=-2$.

$3x^2+1=0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2=-\frac{1}{3}}_{\text{equação impossível}}$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow (x=-2 \ \vee \ x=0) \ \wedge \ x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x=-2 \ \vee \ x=0$.

Assim sendo, a abcissa do ponto A é -2.

A opção correta é a **(A)**.

4. Sabe-se que o gráfico de *f* interseta o eixo *Ox* em dois pontos, ou seja, a função *f* tem dois zeros.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-9}{x+k}=0 \Leftrightarrow x^2-9=0 \ \wedge \ x+k\neq 0 \Leftrightarrow (x=3 \ \vee \ x=-3) \ \wedge \ x\neq -k$.

A função *f* tem dois zeros se $k\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$.

A opção correta é a **(D)**.

5.

5.1.

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R}:\ x+2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

b) $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-5x}{x+2}=0 \Leftrightarrow 2x^2-5x=0\ \wedge\ x+2\neq 0$.

$2x^2-5x=0 \Leftrightarrow x(2x-5)=0 \Leftrightarrow x=0\ \vee\ x=\dfrac{5}{2}$.

$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \left(x=0\ \ \vee\ \ x=\dfrac{5}{2}\right)\ \wedge\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\} \Leftrightarrow x=0\ \ \vee\ \ x=\dfrac{5}{2}$.

Zeros de *f*: 0 e $\dfrac{5}{2}$.

5.2. $2 \in D'_f \Leftrightarrow \exists x \in D_f:\ f(x)=2$.

$f(x)=2 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-5x}{x+2}=2 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-5x}{x+2}-2=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-7x-4}{x+2}=0 \Leftrightarrow 2x^2-7x-4=0\ \wedge\ x+2\neq 0$.

$2x^2-7x-4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{7\pm\sqrt{49+32}}{4} \Leftrightarrow x=4\ \vee\ x=-\dfrac{1}{2}$.

$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$.

$f(x)=2 \Leftrightarrow \left(x=4\ \ \vee\ \ x=-\dfrac{1}{2}\right)\ \wedge\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\} \Leftrightarrow x=4\ \ \vee\ \ x=-\dfrac{1}{2}$.

Donde se conclui que 2 pertence ao contradomínio da função.

5.3. $f(x)<7 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-5x}{x+2}<7 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-5x}{x+2}-7<0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-12x-14}{x+2}<0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-6x-7}{x+2}<0$.

$x^2-6x-7=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{6\pm\sqrt{36+28}}{2} \Leftrightarrow x=7\ \vee\ x=-1$.

$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$.

x	$-\infty$	-2		-1		7	$+\infty$
x^2-6x-7	+	+	+	0	–	0	+
$x+2$	–	0	+	+	+	+	+
$\dfrac{x^2-6x-7}{x+2}$	–	S.S.	+	0	–	0	+

$f(x)<7 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-6x-7}{x+2}<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]-1,7\right[$.

Conjunto-solução: $\left]-\infty,-2\right[\cup\left]-1,7\right[$.

6.

6.1. Sendo *P* um ponto de abcissa positiva pertencente ao gráfico de *f*, então $P(x, f(x))$, $x > 0$.

No caso de a ordenada de *P* ser 0,8 tem-se:

$$f(x)=0{,}8 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1}=0{,}8 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1}-0{,}8=0 \Leftrightarrow \frac{0{,}2x-0{,}8}{x+1}=0 \Leftrightarrow 0{,}2x-0{,}8=0 \ \wedge \ x+1\neq 0 \Leftrightarrow x=4 .$$

Nesse caso, a ordenada do ponto *Q* é: $g(4)=4$.

Área do triângulo [*OPQ*]: $\dfrac{(4-0{,}8)\times 4}{2}=6{,}4$.

6.2. Sendo *P* um ponto de abcissa positiva pertencente ao gráfico de *f*, então $P(x, f(x))$, $x > 0$.

Como o ponto *Q* tem abcissa igual à de *P* e pertence ao gráfico de *g*, então $Q(x, g(x))$, $x > 0$.

$$a(x)=\frac{(g(x)-f(x))\times x}{2}=\frac{\left(x-\frac{x}{x+1}\right)\times x}{2}=\frac{\left(\frac{x^2+x-x}{x+1}\right)\times x}{2}=\frac{\frac{x^3}{x+1}}{2}=\frac{x^3}{2x+2},\quad x>0 .$$

6.3. $\overline{PQ}=\frac{9}{4} \Leftrightarrow g(x)-f(x)=\frac{9}{4} \wedge x>0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}=\frac{9}{4} \wedge x>0 \Leftrightarrow \frac{4x^2-9x-9}{x+1}=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4x^2-9x-9=0 \wedge x+1\neq 0 \wedge x>0 \Leftrightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{81+144}}{8} \wedge x>0 \Leftrightarrow \left(x=3 \vee x=-\frac{3}{4}\right) \wedge x>0 \Leftrightarrow x=3 .$$

$$a(3)=\frac{3^3}{2\times 3+2}=\frac{27}{8} .$$

Quando $\overline{PQ}=\frac{9}{4}$, a área do triângulo [*OPQ*] é igual a $\frac{27}{8}$.

Teste de Autoavaliação 9

1. $\lim u_n = \lim\left(\frac{1}{3n-1}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0$.

$\lim f(u_n) = \lim \frac{2u_n}{u_n+3} = \frac{2\times 0}{0+3} = \frac{0}{3} = 0$.

A opção correta é a **(A)**.

2. O termo geral de (u_n) pode ser $u_n = \frac{3-n}{n}$ pois:

$\lim u_n = \lim\left(\frac{3-n}{n}\right) = \lim\left(\frac{3}{n}-1\right) = 0^+ - 1 = -1^+$ e $\lim f(u_n) = 8$.

A opção correta é a **(C)**.

3. $\lim u_n = \lim\left(n^2+2n\right) = +\infty$.

$\lim f(u_n) = \lim \frac{3u_n-1}{u_n-2} = \lim \frac{u_n\left(3-\frac{1}{u_n}\right)}{u_n\left(1-\frac{2}{u_n}\right)} = \lim \frac{3-\frac{1}{u_n}}{1-\frac{2}{u_n}} = \frac{3-\frac{1}{+\infty}}{1-\frac{2}{+\infty}} = \frac{3-0}{1-0} = 3$.

A opção correta é a **(B)**.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{|1-x|}{1-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1+x}{1-2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\left(-\frac{1}{x}+1\right)}{x\left(\frac{1}{x}-2\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-2} = \frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2}$.

A opção correta é a **(D)**.

5.

5.1.

a) Para toda a sucessão (x_n) tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in D_f$ e $\lim x_n = -1$, tem-se: $\lim f(x_n) = \lim \frac{2x_n+1}{x_n-1} = \frac{-2+1}{-1-1} = \frac{1}{2}$.

Então, conclui-se que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \frac{1}{2}$.

b) Para toda a sucessão (x_n) tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in D_f$ e $\lim x_n = +\infty$, tem-se: $\lim f(x_n) = \lim(3x_n+k) = +\infty$.

Então, conclui-se que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

5.2. Como $0 \in D_f$, existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ se $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2\times 0+1}{0-1} = -1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (3x+k) = 3\times 0 + k = k$.

$f(0) = 3\times 0 + k = k$.

Então existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ se $k = -1$.

6.

6.1. $D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f \setminus \{x : f(x) = 0\}$.

$D_g = D_f = \mathbb{R}$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \ \vee \ x = 1$.

Então, $D_{\frac{g}{f}} = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

6.2.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 3x + 2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)(x-3)}{x-1} = \frac{(2+1)(2-3)}{2-1} = -3$.

<u>Cálculo auxiliar</u>: Como 2 é zero do polinómio $x^3 - 4x^2 + x + 6$, aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

	1	−4	1	6
2		2	−4	−6
	1	−2	−3	0

Então, sabe-se que $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x-2)\left(x^2 - 2x - 3\right)$.

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2 - 2x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \ \vee \ x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2 \ \vee \ x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \ \vee \ x = 3 \ \vee \ x = -1$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{2} = 0$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 3x + 2} = \frac{4}{0^-} = -\infty$

7. $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{\left(\sqrt{x+2} - 2\right)\left(\sqrt{x+2} + 2\right)}{\left(x^2 - 4\right)\left(\sqrt{x+2} + 2\right)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x + 2 - 4}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2} + 2\right)} =$

$\displaystyle = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{x+2} + 2\right)} = \frac{1}{16}$.

$\displaystyle\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{4\sqrt{18 - x}} = \frac{1}{16}$.

$g(2) = \dfrac{1}{4\sqrt{18-2}} = \dfrac{1}{16}$.

Como $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^+} g(x) = g(2) = \frac{1}{16}$, resulta que existe $\displaystyle\lim_{x\to 2} g(x)$ e é igual a $\dfrac{1}{16}$.

Atendendo a que $2 \in D_g$ e existe $\displaystyle\lim_{x\to 2} g(x)$, conclui-se que *g* é contínua em $x = 2$.

8.

8.1. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x^2+|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x^2-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} (2x-1) = -1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x^2+|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x^2+x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} (2x+1) = 1$.

Então, não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ porque $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

8.2. Seja $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Se $a > 0$, tem-se:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{2x^2+|x|}{x} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{2x^2+x}{x} = \dfrac{2a^2+a}{a} = 2a+1$.

Se $a < 0$, tem-se:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{2x^2+|x|}{x} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{2x^2-x}{x} = \dfrac{2a^2-a}{a} = 2a-1$.

Para qualquer valor de $a \neq 0$ existe e é finito o $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Daqui resulta que *f* é contínua em *a*.

Teste de Autoavaliação 10

1. Assíntotas ao gráfico da função *f* : $x=2$; $y=-1$.

O gráfico de *g* obtém-se a partir do gráfico de *f* por uma translação de vetor $\vec{u}(1,3)$.

Assíntotas ao gráfico da função *g* : $x=3$; $y=2$.

A opção correta é a **(B)**.

2. Como a função *f* é definida por $f(x)=2-\frac{3}{x}$, sabe-se que as assíntotas ao seu gráfico são as retas de equação $x=0$ e $y=2$.

O gráfico de *g* obtém-se a partir do gráfico de *f* por uma translação de vetor $\vec{u}(a,b)$.

Assíntotas ao gráfico da função *g* : $x=a$; $y=2+b$.

Então as coordenadas do ponto *P*, ponto de interseção das assíntotas ao gráfico da função *g*, são $(a,2+b)$.

A opção correta é a **(D)**.

3. Recorrendo ao algoritmo da divisão tem-se:

$$\begin{array}{r|l} 2x-5 & x-3 \\ \cline{2-2} \underline{-2x+6} & 2 \\ 11 & \end{array} .$$

Então, $f(x)=2+\frac{11}{x-3}$.

Assíntotas ao gráfico da função *f* : $x=3$; $y=2$.

Como *P* é o ponto de interseção das assíntotas ao gráfico da função *f*, conclui-se que $A(3,2)$.

A soma das coordenadas de *P* é igual a 5.

A opção correta é a **(A).**

4. Declive da reta *r*: $m_r=\frac{1-(-3)}{2-0}=2$.

Equação reduzida da reta *r*: $y=2x-3$.

Como o domínio da função *f* é IR^+ e a reta *r* é assíntota ao gráfico de *f*, sabe-se que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m_r=2 \text{ e } \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x+3\right)=0 .$$

A opção correta é a **(C)**.

5.

5.1. Recorrendo ao algoritmo da divisão tem-se:

$$\begin{array}{r|l} x+3 & 2x-1 \\ \hline -x+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{7}{2} & \end{array}$$.

Então, $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{\frac{7}{2}}{2x-1}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{7}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{7}{4}}{x-\frac{1}{2}}$.

5.2. As equações das retas que são assíntotas ao gráfico da função *f* são $x=\frac{1}{2}$ e $y=\frac{1}{2}$.

6.

6.1. $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-3x+1}{2x+1}=0 \Leftrightarrow 2x^2-3x+12=0 \ \wedge\ 2x+1\neq 0$.

$2x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4} \Leftrightarrow x=1 \ \vee\ x=\frac{1}{2}$.

$2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \left(x=1 \ \vee\ x=\frac{1}{2}\right) \ \wedge\ x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\} \Leftrightarrow x=1 \ \vee\ x=\frac{1}{2}$.

Zeros de *f* : $\frac{1}{2}$ e 1 .

6.2. $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ 2x+1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-}\frac{2x^2-3x+1}{2x+1}=\frac{\frac{3}{2}}{0^-}=-\infty .$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+}\frac{2x^2-3x+1}{2x+1}=\frac{\frac{3}{2}}{0^+}=+\infty .$$

Portanto, a reta de equação $x=-\frac{1}{2}$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

A reta *s* é a reta de equação $x=-\frac{1}{2}$.

Uma equação vetorial da reta *s* é:

$(x,y)=\left(-\frac{1}{2},0\right)+k(0,1),\ k\in\mathbb{R}$.

6.3. <u>Assíntota não vertical</u> $(y=mx+b)$

· Em $+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x+1}{2x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}1=1 .$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-3x+1}{2x+1}-1x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x+1-2x^2-x}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+1}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{2x}=-2 .$$

Portanto, a reta $y=x-2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* em $+\infty$.

· Em $-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3x+1}{2x^2+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{2x^2}=\lim_{x\to-\infty}1=1\,.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2-3x+1}{2x+1}-1x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3x+1-2x^2-x}{2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+1}{2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{2x}=-2\,.$$

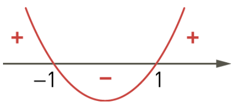
Portanto, a reta $y=x-2$ também é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* em $-\infty$.

Uma equação na forma reduzida da reta *r*, assíntota oblíqua ao gráfico de *f*, é $y=x-2$.

7.

7.1. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x^2-1\geq 0\right\}$.

$x^2-1=0\Leftrightarrow x=1\ \vee\ x=-1$.



$x^2-1\geq 0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$.

Então, $D_f=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$.

$D_g=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq 0\right\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$D_{g\circ f}=\left\{x\in D_f : f(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[: f(x)\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}=\left\{x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[: f(x)\neq 0\right\}$.

$f(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x=1\ \vee\ x=-1$.

Então, $D_{g\circ f}=\left\{x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[: x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\right\}=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$.

7.2. $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g\left(\sqrt{2^2-1}\right)=g\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2-1}{\sqrt{3}}=\dfrac{3-1}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

7.3. <u>Assíntotas não verticais ao gráfico de *f*</u> $(y=mx+b)$

· Em $+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=\sqrt{1-0}=1\,.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=\frac{-1}{+\infty}=0\,.$$

Portanto, a reta $y=x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* em $+\infty$.

· Em $-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=-\sqrt{1-0}=-1\,.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}{\sqrt{x^2-1}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}=\frac{-1}{+\infty}=0\,.$$

Portanto, a reta $y=x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* em $-\infty$.

<u>Assíntotas não verticais ao gráfico de *g*</u> $(y=mx+b)$

· Em $+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1-0=1\,.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(g(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-1x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0\,.$$

Portanto, a reta $y=x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *g* em $+\infty$.

· Em $-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1-0=1\,.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(g(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-1x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1-x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}=0\,.$$

Portanto, a reta $y=x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *g* em $-\infty$.

<u>Conclusão</u>: a reta de equação $y=x$ é assíntota comum aos gráficos de *f* e de *g*.

Teste de Autoavaliação 11

1. $\text{t.m.v.}_{[1,\,3]} = 7 \Leftrightarrow \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = 7 \Leftrightarrow f(3)-f(1)=14$.

A opção correta é a **(C)**.

2. Sendo $r: y = x+2$ a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa -2, sabe-se que $f(-2)=0$ e $f'(-2)=1$.

As opções **(A)** e **(B)** excluem-se porque, nestes casos, $f(-2)\neq 0$.

No caso da opção **(C)**, $f'(x)=-2x-1$. Logo, $f'(-2)=3$.

Assim sendo, a opção **(C)** também se exclui.

No caso da opção **(D)**, $f'(x)=2x+5$. Logo, $f'(-2)=1$.

A opção correta é a **(D)**.

3. A reta *t* é tangente ao gráfico de *f* no ponto *A* de abcissa 1. Então, $m_t = f'(1)$.

$f'(x)=\left(x^3-2x\right)'=3x^2-2$.

Logo, $m_t = 3\times 1^2 - 2 = 1$.

Uma equação da reta *t* é do tipo $y = 1x + b$.

$f(1) = 1^3 - 2\times 1 = -1$.

Como o ponto de coordenadas $A(1,-1)$ pertence à reta *t*, então tem-se: $-1 = 1 + b \Leftrightarrow b = -2$.

Equação reduzida da reta *t*: $y = x - 2$.

A opção correta é a **(A).**

4. Por observação gráfica, sabe-se que $\forall x \in \left]0,2\right[,\ f'(x)<0$.

Então, a função *f* é estritamente decrescente no intervalo $\left]0,2\right[$.

Logo, a afirmação $f(1) > f\left(\sqrt{2}\right)$ é verdadeira.

A opção correta é a **(B)**.

5.

5.1. Seja *t* a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 2. Então, $m_t = f'(2) = \frac{2\times 2}{2^2+1} = \frac{4}{5}$.

Uma equação da reta *t* é do tipo $y = \frac{4}{5}x + b$.

Como $f(2) = -3$, o ponto de coordenadas $(2,-3)$ pertence à reta *t*. Então, tem-se:

$-3 = \frac{4}{5}\times 2 + b \Leftrightarrow b = -3 - \frac{8}{5} \Leftrightarrow b = -\frac{23}{5}$.

Equação reduzida da reta *t*: $y = \frac{4}{5}x - \frac{23}{5}$.

5.2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times \lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = f'(1)\times\frac{1}{2} = \frac{2\times 1}{1^2+1}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

6.

6.1. Assíntota não vertical em $+\infty$ $(y = mx + b)$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 .$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - 1x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1 .$$

Portanto, a reta de equação $y = x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* em $+\infty$.

6.2. Seja *A* o ponto do gráfico de *f* de ordenada 4.

Determinação da abcissa de *A*:

$$f(x) = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 4}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \ \wedge \ x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x = 2 \ \wedge \ x \neq 1 \Leftrightarrow x = 2 .$$

O declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *A* é dado por $f'(2)$.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{(x^2)'(x-1) - (x-1)'(x^2)}{(x1)^2} = \frac{2x(x-1) - 1(x^2)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} .$$

Então, $f'(2) = \frac{2^2 - 2\times 2}{(2-1)^2} = 0$.

Como o declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *A* é igual a zero, conclui-se que a reta tangente nesse ponto é horizontal, ou seja, é paralela ao eixo das abcissas.

6.3. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \ \wedge \ (x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x = 0 \ \vee \ x = 2) \ \wedge \ x \neq 1 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 2 .$$

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
f'	+	0	–	n.d.	–	0	+
f	$\nearrow$	0	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	4	$\nearrow$

f é estritamente decrescente em $[0,1[$ e em $]1,2]$.

f é estritamente crescente em $]-\infty,0]$ e em $[2,+\infty[$.

4 é mínimo local para $x = 2$ e 0 é máximo local para $x = 0$.

7. O ponto *P* pertence ao gráfico de *f* e tem abcissa x tal que $x \in]0,\ 5[$, então $P(x, f(x))$, em que $x \in]0,\ 5[$.

Seja *s* a função que a cada valor de *x*, abcissa do ponto *P*, faz corresponder a soma das distâncias de *P* aos eixos coordenados.

$$s(x) = f(x) + x = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 5 + x = -\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x + 5 .$$

$$s'(x) = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x + 5\right)' = -x + \frac{5}{2} .$$

$$s'(x) = 0 \Leftrightarrow -x + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} .$$

x	0		$\frac{5}{2}$		5
s'	n.d.	+	0	–	n.d.
s	n.d.	$\nearrow$	$\frac{65}{8}$	$\searrow$	n.d.

A soma das distâncias de *P* aos eixos coordenados é máxima quando $x = \frac{5}{2}$.

Assim sendo, $P\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$, ou seja, $P\left(\frac{5}{2}, \frac{45}{8}\right)$.

Teste de Autoavaliação 12

1. Como o desvio vertical do ponto $A(5,8)$ relativamente à reta *r*, de equação $y=3x+b$, é $-\frac{3}{2}$, tem-se:

$$8-(3\times 5+b)=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow 8-15-b=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow b=-\frac{11}{2}.$$

A opção correta é a **(D)**.

2. A equação reduzida da reta *t* de mínimos quadrados da sequência de pontos dada é $y=\frac{10}{7}x+b$.

$$\overline{x}=\frac{\frac{5}{2}+\frac{9}{2}+5}{3}=4 \text{ e } \overline{y}=\frac{4+6+8}{3}=6.$$

Como o ponto de coordenadas $(\overline{x},\overline{y})$ pertence à reta *t*, tem-se:

$$6=\frac{10}{7}\times 4+b \Leftrightarrow b=6-\frac{40}{7} \Leftrightarrow b=\frac{2}{7}.$$

A opção correta é a **(B)**.

3. $r=a\sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}=\frac{8}{3}\times\sqrt{\frac{9}{81}}=\frac{8}{3}\times\frac{3}{9}=\frac{8}{9}$.

O coeficiente de correlação linear entre as duas variáveis é $\frac{8}{9}$.

A opção correta é a **(B)**.

4. Relativamente à nuvem de pontos *B* sabe-se que o coeficiente de correlação é negativo e, se traçarmos a reta de mínimos quadrados, os dados estão mais dispersos e afastados dessa reta do que na nuvem de pontos *A*.

Então o coeficiente de correlação correspondente à nuvem *B* é negativo e superior ao coeficiente de correlação correspondente à nuvem *A*.

Dos valores apresentados nas opções de resposta, o que corresponde ao coeficiente de correlação da nuvem *B* é $-0,68$.

A opção correta é a **(A)**.

5.

5.1. $\overline{x}=\frac{3+2+4+1}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}=2,5$ e $\overline{y}=\frac{4+3+3+4}{4}=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}=3,5$.

Então, as coordenadas do ponto *G* são $(2,5;3,5)$.

A reta *t* é definida pela equação $y=-\frac{1}{5}x+\frac{18}{5}$.

O ponto $G(2,5;3,5)$ não pertence à reta *t* porque $3,5\neq-\frac{1}{5}\times 2,5+\frac{18}{5}$.

5.2.

$$e_1=4+\frac{1}{5}\times 3-\frac{18}{5}=1.$$

$$e_2=3+\frac{1}{5}\times 2-\frac{18}{5}=-\frac{1}{5}=-0,2.$$

$$e_3=3+\frac{1}{5}\times 4-\frac{18}{5}=\frac{1}{5}=0,2.$$

$$e_4=4+\frac{1}{5}\times 1-\frac{18}{5}=-\frac{3}{5}=0,6.$$

x_i	y_i	e_i
3	4	1
2	3	$-0,2$
4	3	0,2
1	4	0,6

$e_1+e_2+e_3+e_4=1+(-0,2)+0,2+0,6=1,6$.

A soma dos desvios verticais e_i é 1,6.

5.3. Seja *r* a reta paralela à reta *t* e que passa por *G*.

Como *r* e *t* são retas paralelas, sabe-se que $m_r=m_t$.

Uma equação da reta *r* é do tipo $y=-\frac{1}{5}x+b$.

Como o ponto $G(2,5;3,5)$ pertence à reta *r*, então tem-se:

$3,5=-\frac{1}{5}\times 2,5+b \Leftrightarrow b=4$.

Equação da reta *r*: $y=-\frac{1}{5}x+4$.

6.

6.1.

	x_i	y_i	$x_i-\overline{x}$	$(x_i-\overline{x})^2$
$A(2;5,5)$	2	5,5	-2	4
$B(3;3,8)$	3	3,8	-1	1
$C(4;5,2)$	4	5,2	0	0
$D(5;3)$	5	3	1	1
$E(6;1,5)$	6	1,5	2	4
	$\sum_{i=1}^{5}x_i=20$	$\sum_{i=1}^{5}y_i=19$		$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=10$

$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i}{5}=\frac{20}{5}=4$.

$SS_x=\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=10$.

6.2.

	x_i	y_i	$x_i\,y_i$
$A(2;5,5)$	2	5,5	11
$B(3;3,8)$	3	3,8	11,4
$C(4;5,2)$	4	5,2	20,8
$D(5;3)$	5	3	15
$E(6;1,5)$	6	1,5	9
	$\sum_{i=1}^{5}x_i=20$	$\sum_{i=1}^{5}y_i=19$	$\sum_{i=1}^{5}x_i\,y_i=67,2$

$\overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{5}y_i}{5}=\frac{19}{5}=3,8$.

$a=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\,\overline{y}}{SS_x}=\frac{67,2-5\times 4\times 3,8}{10}=-0,88$.

$b=\overline{y}-a\overline{x}=3,8-(-0,88)\times 4=7,32$.

Equação da reta *r*: $y=-0,88x+7,32$.

7.

7.1. $\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{6}x_i}{6}=\frac{6+9+10+12+13+16}{6}=\frac{66}{6}=11$.

O custo médio de cada unidade do produto é de 11 euros.

7.2.

	x_i	y_i	$x_i-\overline{x}$	$(x_i-\overline{x})^2$	$y_i-\overline{y}$	$(y_i-\overline{y})^2$	$x_i\,y_i$
A	6	50	-5	25	22	484	300
B	9	40	-2	4	12	144	360
C	10	30	-1	1	2	4	300
D	12	24	1	1	-4	16	288
E	13	14	2	4	-14	196	182
F	16	10	5	25	-18	324	160
	$\sum_{i=1}^{6}x_i=66$	$\sum_{i=1}^{6}y_i=168$		$\sum_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})^2=60$		$\sum_{i=1}^{6}(y_i-\overline{y})^2=1168$	$\sum_{i=1}^{6}x_i\,y_i=1590$

$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{6}x_i}{6}=11$ e $\overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{6}y_i}{6}=\frac{168}{6}=28$.

$SS_x=\sum_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})^2=60$ e $SS_y=\sum_{i=1}^{6}(y_i-\overline{y})^2=1168$.

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{6}x_iy_i-6\overline{x}\,\overline{y}}{SS_x}=\frac{1590-6\times 11\times 28}{60}=-4,3 .$$

$$r=a\sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}=-4,3\times\sqrt{\frac{60}{1168}}\approx -0,975 .$$

O coeficiente de correlação linear entre as duas variáveis, com arredondamento às milésimas, é $-0,975$.

7.3. $b=\overline{y}-a\,\overline{x}=28-(-4,3)\times 11=75,3$.

Equação da reta de mínimos quadrados: $y=-4,3x+75,3$.

Se $x=14$ então $y=-4,3\times 14+75,3=15,1$.

Relativamente a um produto com um custo de 14 euros, estima-se que sejam vendidas, aproximadamente, 15 unidades.