

Chapitre 5

# Commande par retour d'état linéarisant

## SOMMAIRE DU CHAPITRE

<b>1</b>	<b>Systèmes mono-entrée mono-sortie (SISO)</b>	<b>3</b>
1.1	Degré relatif	3
	Remarque 1	4
	Remarque 2	4
	Remarque 3. Analogie avec les systèmes linéaires	4
	Remarque 4	5
1.2	Conditions de linéarisation exacte	5
	Remarque	5
1.3	Linéarisation exacte par retour d'état	5
1.3.1	Forme normale	5
1.3.2	Retour d'état linéarisant	6
1.4	Linéarisation partielle par retour d'état	8
1.4.1	Forme normale	8
1.4.2	Retour d'état linéarisant	8
1.4.3	Dynamique interne	10
1.4.4	Dynamique des zéros	10
<b>2</b>	<b>Système multi-entrée multi-sortie (MIMO)</b>	<b>11</b>
2.1	Degré relatif vectoriel	11
	Remarque 1	11
	Remarque 2	11
2.2	Conditions de linéarisation exacte	12
2.3	Linéarisation exacte par retour d'état	12
2.3.1	Forme normale	12
2.3.2	Retour d'état linéarisant	13
2.4	Linéarisation partielle par retour d'état	13
2.4.1	Forme normale	13
2.4.2	Retour d'état linéarisant	15
2.4.3	Dynamique interne et dynamique des zéros	15

La linéarisation classique basée sur le calcul du Jacobien donne une approximation du comportement d'un système donné autour d'un point de fonctionnement. Pour une large variation autour de ce point de fonctionnement, la commande basée sur cette linéarisation perd ses performances, et le système perd sa stabilité.

La linéarisation par retour d'état est une autre approche qui fait face à ces limitations. Elle transforme le modèle non linéaire en un modèle équivalent linéaire, sur toute la plage de fonctionnement. Cette linéarisation se fait en deux étapes :

-une transformation de coordonnées ;

-et un retour d'état non linéaire.

Suivant le choix de sorties du système, la linéarisation est soit exacte soit partielle. Pour la linéarisation partielle, une partie du système est rendue inobservable. La stabilité de cette partie non observable doit être mise en compte.

## 1 Systèmes mono-entrée mono-sortie (SISO)

On considère le système mono-entrée mono-sortie suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x) u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{5.1}$$

avec

$x = [x_1 \ x_2 \dots \ x_n]^T$ : vecteur d'état ;

$u(y)$ : entrée (sortie) du système ;

$h(x)$ : fonction analytique de  $x$  ;

$f, g$ : champs de vecteurs supposés infiniment différentiables.

### 1.1 Degré relatif

Le système (5.1) est dit de degré relatif  $r$  si :

$$\begin{aligned}L_g L_f^i h(x) &= 0 \quad 0 \leq i < r-1 \\ L_g L_f^{r-1} h(x) &\neq 0\end{aligned}\tag{5.2}$$

avec  $L_f h$ : dérivée de Lie de  $h$  suivant le champ de vecteurs  $f$  :

$$L_f h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} f_i\tag{5.3}$$

**Remarque 1**

Le degré relatif représente le nombre de fois qu'il faut dériver la sortie du système pour faire apparaître explicitement l'entrée :

$$\begin{aligned}
 \dot{y} &= \frac{dh(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \\
 &= \frac{dh(x)}{dx} (f(x) + g(x)u) \\
 &= L_f h(x) + L_g h(x)u
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Si le degré relatif est supérieur à 1, on a :  $L_g h(x) = 0$ . Donc :  $\dot{y} = L_f h(x)$

et on montre que :

$$\begin{aligned}
 y^{(i)} &= L_f^i h(x) \quad 0 \leq i < r \\
 y^{(r)} &= L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

**Remarque 2**

Pour un système commandable, on a toujours  $r \leq n$ . Si l'entrée n'apparaît pas après  $n$  dérivations de la sortie, le système est non commandable.

Pour  $r = n$ , le système admet une linéarisation exacte.

Pour  $r < n$ , le système admet une linéarisation partielle. L'ordre du sous système linéarisé est égal à  $r$ .

**Remarque 3. Analogie avec les systèmes linéaires**

Le degré relatif  $r$  d'un système linéaire :

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + bu \\
 y &= cx
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

est caractérisé par :

$$\begin{aligned}
 cA^i b &= 0 \quad 0 \leq i < r-1 \\
 cA^{r-1} b &\neq 0
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

L'entier  $r$  qui satisfait ces conditions est égale à la différence entre le degré du dénominateur et celui de numérateur de la fonction de transfert du système :

$$H(s) = c(sI - A)^{-1}b \quad (5.8)$$

#### Remarque 4

Les fonctions  $h, L_f h, L_f^2 h, \dots, L_f^{r-1} h$  (dérivées successives de la sortie  $y$ ) ont une importance particulière ; Elles peuvent être choisies comme base d'un nouveau système de coordonnées. Ce choix apporte une simplification importante au modèle.

### 1.2 Conditions de linéarisation exacte

Le système (5.1) admet une linéarisation exacte par retour d'état si est seulement si :

- 1- Les vecteurs  $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g, ad_f^{n-1} g\}$  sont linéairement indépendants.
- 2- La distribution  $D = \text{span} \{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g\}$  est involutive et de rang constant.

On désigne par  $ad_f g$  le crochet de Lie des vecteurs  $f$  et  $g$  :

$$ad_f g = \nabla g \cdot f - \nabla f \cdot g \quad (5.9)$$

#### Remarque

La première condition reflète la condition de commandabilité ; pour le système linéaire (5.6), la matrice  $(g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g, ad_f^{n-1} g)$  devient :  $(b, Ab, A^2 b, \dots, A^{n-1} b)$  qui est la matrice de commandabilité.

### 1.3 Linéarisation exacte par retour d'état

Si les conditions de linéarisation exacte sont vérifiées, il existe au moins une sortie  $y=h(x)$ , n'ayant pas forcément un sens physique, pour laquelle le degré relatif  $r$  est égal à  $n$ , et le système admet une linéarisation exacte. Cette linéarisation se fait en deux étapes ; la mise du système sous la forme normale, et le retour d'état linéarisant.

#### 1.3.1 Forme normale

Pour mettre le système sous sa forme normale, on applique la transformation des coordonnées (difféomorphisme)  $\phi$  suivante :

$$\begin{aligned}
z_1 &= \phi_1(x) = h(x) \\
z_2 &= \phi_2(x) = L_f h(x) \\
&\dots\dots\dots \\
z_n &= \phi_n(x) = L_f^{n-1} h(x)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Dans les nouvelles coordonnées  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , le système (5.1) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= z_3 \\
&\dots\dots\dots \\
\dot{z}_n &= b(z) + a(z)u
\end{aligned} \tag{5.11}$$

avec

$$\begin{aligned}
a(z) &= L_g L_f^{n-1} h(x) \\
b(z) &= L_f^n h(x)
\end{aligned} \tag{5.12}$$

### 1.3.2 Retour d'état linéarisant

L'entrée  $u$  du système est une fonction des états :

$$u = \alpha(z) + \beta(z)v \tag{5.13}$$

avec  $v$ : nouvelle entrée pour laquelle le système est linéaire.

On choisit  $\alpha$  et  $\beta$  pour que la dernière équation de (5.11) devienne :

$$\dot{z}_n = v \tag{5.14}$$

Par identification, on trouve :

$$\begin{aligned}
\alpha(z) &= \frac{1}{a(z)} \\
\beta(z) &= \frac{-b(z)}{a(z)}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Le système (5.11) s'écrit alors :

$$\dot{z} = Az + bv$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & 0 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

L'équation (5.16) représente un intégrateur d'ordre  $n$  (Fig 5.1).

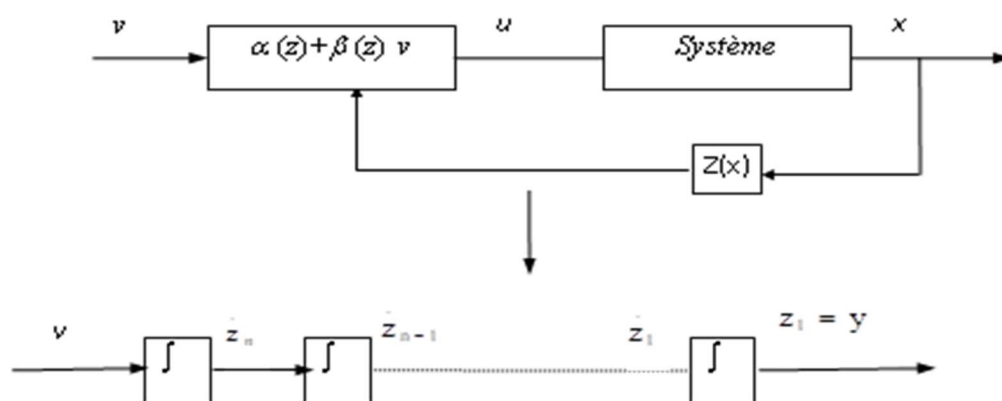


Fig.5.1 Linéarisation exacte par retour d'état. Forme canonique de Brunovsky

L'entrée  $v$  est obtenue en appliquant une méthode de réglage linéaire (retour d'état, régulateur classique..etc), Comme indiqué sur la fig. 5.2.

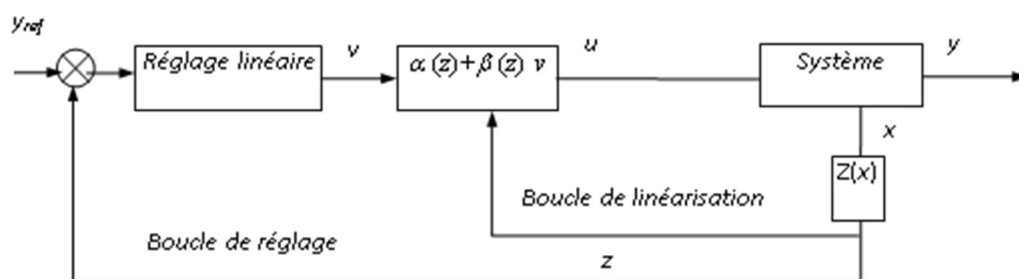


Fig.5.2 Les deux boucles de réglage linéaire, et de linéarisation.

### 1.4 Linéarisation partielle par retour d'état

La linéarisation partielle correspond à un degré relatif inférieur à l'ordre du système :  $r < n$ .

#### 1.4.1 Forme normale

Les fonctions  $h, L_f h, L_f^2 h, \dots, L_f^{r-1} h$  donnent les  $r$  premières composantes du difféomorphisme  $\phi$ . Les  $(n-r)$  composantes restantes sont choisies de sorte que :

$$L_g \phi_i(x) = 0 \quad r+1 \leq i \leq n \quad (5.17)$$

pour que leurs dérivées soient indépendantes de l'entrée  $u$ .

Dans le nouveau système de coordonnées, le système (5.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= b(z) + a(z)u \\ \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{z}_n &= q_n(z) \end{aligned} \quad (5.18)$$

avec

$$\begin{aligned} a(z) &= L_g L_f^{r-1} h(\phi^{-1}(z)) \\ b(z) &= L_f^r h(\phi^{-1}(z)) \\ q_i(z) &= L_f \phi_i \quad r+1 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (5.19)$$

#### 1.4.2 Retour d'état linéarisant

Le retour d'état :

$$u = \frac{1}{a(z)}(v - b(z)) \quad (5.20)$$

transforme le système (5.18) en une partie linéaire sous forme canonique de Brunowsky (équation (5.21) et une partie non observable (équation (5.22)) :



$$\dot{\zeta} = Az + bv \quad (5.21)$$

$$\dot{\eta} = q(\zeta, \eta) \quad (5.22)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \zeta &= (\zeta_1 \dots \zeta_r)^T = (z_1 \dots z_r)^T \\ \eta &= (\eta_1 \dots \eta_{n-r})^T = (z_{r+1} \dots z_n)^T \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$A(r,r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \end{pmatrix}; \quad b(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

L'entrée  $v$  est obtenue par un réglage linéaire (Fig 5.3) :

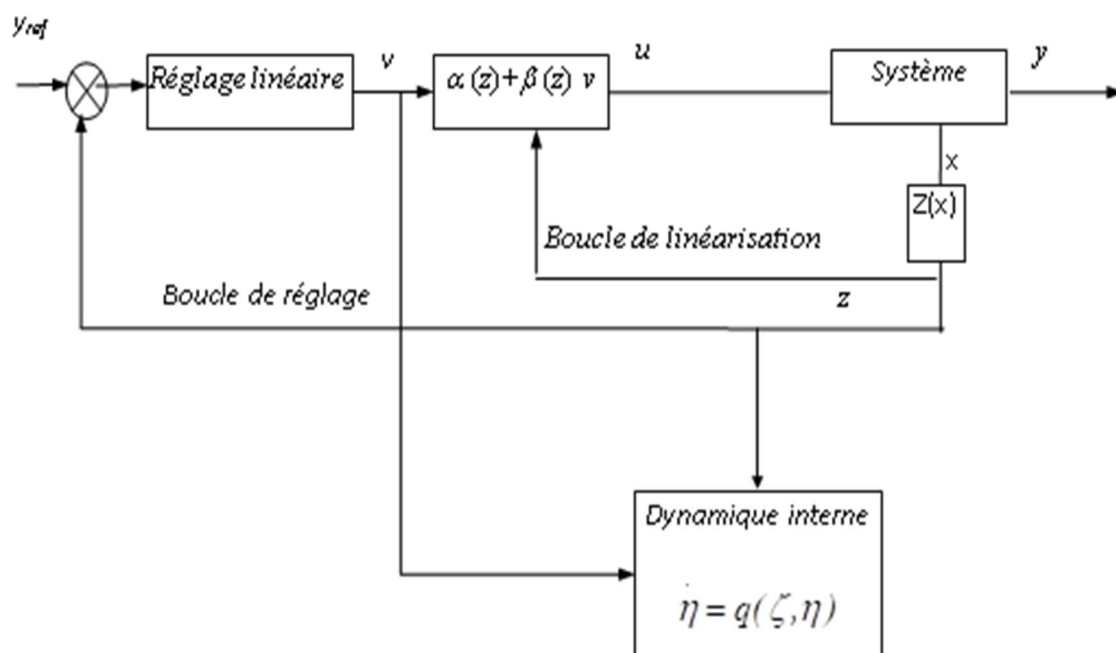


Fig.5.3 Linéarisation partielle et dynamique interne.

### 1.4.3 Dynamique interne

La dynamique de la partie non observable (5.22) est appelée la dynamique interne. La stabilité de cette dynamique est exigée pour la conception de la commande. Pour un système linéaire, la dynamique interne est stable si les zéros de la fonction de transfert se situent dans le demi-plan gauche du domaine complexe (système à phase minimale). Par analogie, on introduit la notion de la dynamique des zéros pour étudier la stabilité de la dynamique interne d'un système non linéaire.

### 1.4.4 Dynamique des zéros

La dynamique des zéros est la dynamique interne lorsque l'entrée du système est choisie de manière à porter la sortie à zéro à l'instant  $t=t_0$ , et l'y maintient. Si la sortie  $y$  est maintenue nulle, ces dérivées doivent être nulles aussi. En imposant cette condition au système (5.21) (5.22), on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= 0 \\ \dot{\xi} &= q(0, \eta) \\ \eta(0) &= \eta_0\end{aligned}\tag{5.25}$$

et l'entrée  $u$  est égale à :

$$u(x) = -\frac{L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)}$$

La dynamique des zéros décrit l'évolution de l'état du système dans la surface de dimension  $(n-r)$  défini par la condition  $\zeta = 0$ . La Fig 5.4 donne l'illustration de la dynamique des zéros pour un système d'ordre  $n=3$  et de degré relatif  $r=1$ .

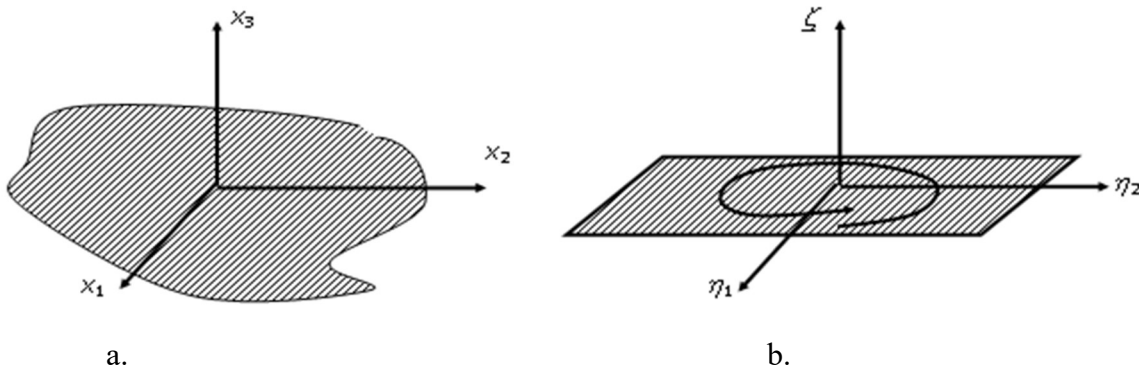


Fig.5.4 Evolution de l'état du système dans l'espace de la dynamique des zéros pour le cas  $n=3, r=1$ .

- a- dans les coordonnées originales
- b- dans les coordonnées normales.

## 2 Système multi-entrée multi-sortie (MIMO)

On considère le système carré (nombre d'entrées et de sorties égales) :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y_j &= h_j(x) \quad 0 \leq j \leq m\end{aligned}\tag{5.26}$$

avec

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  : vecteur d'état ;

$f, g_1, g_2, \dots, g_m$  : champs de vecteurs.

$h_1, h_2, \dots, h_m$  : des fonctions analytiques au voisinage  $\Omega$  d'un point  $x_1$  de  $\mathcal{R}^n$ .

### 2.1 Degré relatif vectoriel

Le système (5.26) a le degré relatif vectoriel  $(r_1, r_2, \dots, r_m)$  si :

$$1. L_{g_i} L_f^k h_j(x) = 0 \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq m, \quad k < r_i - 1\tag{5.27}$$

2. La matrice de découplage :

$$D(x) = \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1 & L_{g_2} L_f^{r_1-1} h_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1 \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2 & L_{g_2} L_f^{r_2-1} h_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m & L_{g_2} L_f^{r_m-1} h_m & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m \end{pmatrix}\tag{5.28}$$

est non singulière.

#### Remarque 1

Le degré relatif  $r_i$  lié la sortie  $y_i$  représente le nombre de fois qu'il faut dériver cette sortie pour faire apparaître explicitement au moins une des entrées  $u_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ).

#### Remarque 2

Le fait que chaque sortie  $y_i$  ayant le degré relatif  $r_i$  ne signifie pas toujours la non-singularité de la matrice  $D(x)$  ; Une colonne de celle-ci peut être nulle.

## 2.2 Conditions de linéarisation exacte

On construit les distributions (sous espaces) suivantes :

$$G_0 = \text{span}\{g_i, \quad 1 \leq i \leq m\}$$

$$G_1 = \text{span}\{g_i, ad_f g_i, \quad 1 \leq i \leq m\}$$

.....

$$G_{n-2} = \text{span}\{g_i, ad_f^j g_i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n-2\}$$

$$G_{n-1} = \text{span}\{g_i, ad_f^j g_i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n-1\}$$

Le système (5.26) admet une linéarisation exacte si et seulement si :

- 1- la distribution  $G_{n-1}$  est de rang  $n$
- 2- Les distributions  $G_k$  ( $0 \leq k \leq n-2$ ) sont involutives et de rangs constants.

## 2.3 Linéarisation exacte par retour d'état

On considère que les conditions de linéarisation exacte sont vérifiées. Le degré relatif vectoriel satisfait la condition :

$$\sum_{i=1}^m r_i = n \quad (5.29)$$

### 2.3.1 Forme normale

Le difféomorphisme suivant met le système sous la forme normale :

$$\begin{aligned} z_i^1 &= \phi_i^1(x) = h_i(x) \\ z_i^2 &= \phi_i^2(x) = L_f h_i(x) \\ &\dots\dots\dots \\ z_i^{r_i} &= \phi_i^{r_i}(x) = L_f^{r_i-1} h_i(x) \quad 1 \leq i \leq m \end{aligned} \quad (5.30)$$

Dans ces coordonnées, le système (5.26) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{z}_i^1 &= z_i^2 \\ \dot{z}_i^2 &= z_i^3 \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{z}_i^{r_i-1} &= z_i^{r_i} \\ \dot{z}_i^{r_i} &= b_i(z) + \sum_{j=1}^m d_{ij}(z)u \quad 1 \leq i \leq m \end{aligned} \quad (5.31)$$

avec

$$\begin{aligned} b_i(z) &= L_f^{r_i} h_i(\phi^{-1}(z)) \\ d_{ij}(z) &= L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(\phi^{-1}(z)) \quad 1 \leq i, j \leq m \end{aligned} \quad (5.32)$$

Les éléments  $d_{ij}$  de l'équation (5.32) sont identiques aux éléments de la matrice de découplage  $D(x)$  donnée par (5.28).

### 2.3.2 Retour d'état linéarisant

On applique le retour d'état suivant sur le système (5.31) :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ \dots \\ u_m \end{pmatrix} = D^{-1}(z) \begin{pmatrix} v_1 - b_1 \\ v_2 - b_2 \\ \dots \\ \dots \\ v_m - b_m \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \dot{z}_i^1 &= z_i^2 \\ \dot{z}_i^2 &= z_i^3 \\ &\dots \\ \dot{z}_i^{r_i-1} &= z_i^{r_i} \\ \dot{z}_i^{r_i} &= v_i \quad 1 \leq i \leq m \end{aligned} \quad (5.34)$$

Le système (5.34) représente  $n$  intégrateurs indépendants en parallèle (Fig 5.5). Les entrées  $v_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) sont obtenues par un réglage linéaire.

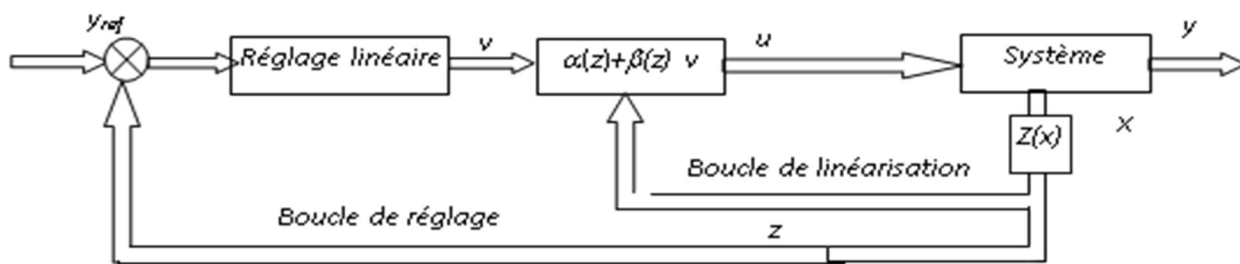
## 2.4 Linéarisation partielle par retour d'état

La linéarisation partielle correspond à la condition :

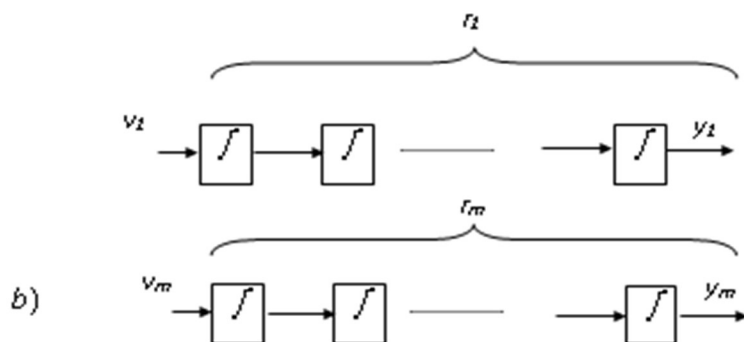
$$\sum_{i=1}^m r_i < n \quad (5.35)$$

### 2.4.1 Forme normale

On doit ajouter  $(n-r)$  fonctions  $\phi_j(x)$  aux fonctions (5.30) pour compléter le difféomorphisme. Le système (5.26) s'écrit alors :



a)



b)

Fig.5. 5. Linéarisation exacte (systèmes MIMO) :

a. Boucles de linéarisation et de réglage. b. Forme canonique de Brunovsky.

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_i^1 &= z_i^2 \\
 \dot{z}_i^2 &= z_i^3 \\
 &\dots\dots\dots \\
 \dot{z}_i^{r_i-1} &= z_i^{r_i} \\
 \dot{z}_i^{r_i} &= b_i(z) + \sum_{j=1}^m d_{ij}(z)u_j \quad 1 \leq i \leq m
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\dot{z}_k = q_k(\eta, \zeta) + p_k(\eta, \zeta)u_{r+1} \quad r+1 \leq k \leq n \tag{5.37}$$

avec

$$\begin{aligned}
 b_i(z) &= L_f^{r_i} h_i(\phi^{-1}(z)) \\
 d_{ij}(z) &= L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(\phi^{-1}(z)) \quad 1 \leq i, j \leq m \\
 q_k(\eta, \zeta) &= L_f \phi_k(x) \\
 p_k(\eta, \zeta) &= L_g \phi_k(x)
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Les éléments  $d_{ij}$  correspondent aux éléments de la matrice de découplage  $D(x)$  (équation (5.28)).

### 2.4.2 Retour d'état linéarisant

L'application du retour d'état :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ \dots \\ u_m \end{pmatrix} = D^{-1}(z) \begin{pmatrix} v_1 - b_1 \\ v_2 - b_2 \\ \dots \\ \dots \\ v_m - b_m \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

met le système (5.36) sous la forme canonique de Brunowsky (5.40) avec la dynamique interne (5.41) (Fig .6.) :

$$\begin{aligned} \dot{z}_i^1 &= z_i^2 \\ \dot{z}_i^2 &= z_i^3 \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{z}_i^{r_i-1} &= z_i^{r_i} \\ \dot{z}_i^{r_i} &= v_i \quad 1 \leq i \leq m \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\dot{z}_k(z) = q_k(\phi^{-1}(z)) + p_k(\phi^{-1}(z))[D^{-1}(\phi^{-1}(z))(v - b)] \quad r+1 \leq k \leq n \quad (5.41)$$

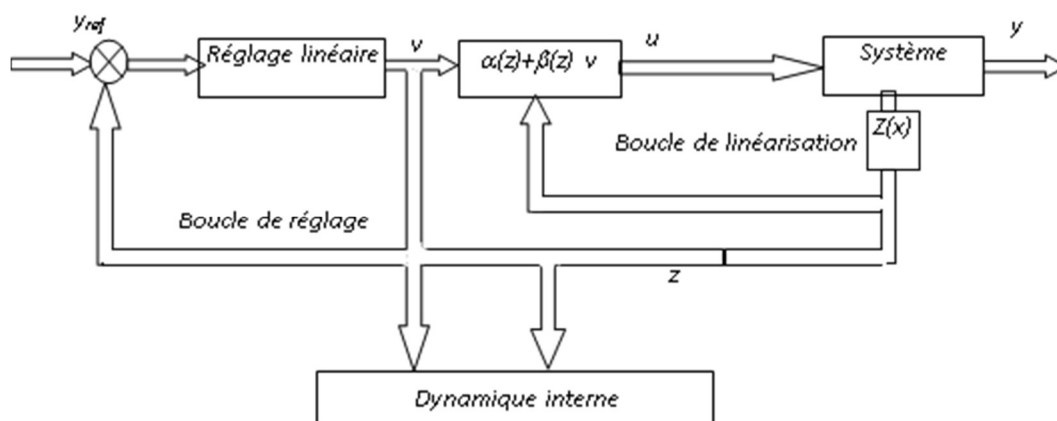


Fig.5. 6. Système MIMO : Linéarisation partielle et dynamique interne

### 2.4.3 Dynamique interne et dynamique des zéros

La dynamique interne est représentée par L'équation (5.41). La dynamique des zéros est la dynamique interne lorsque les entrées sont choisies de façon à maintenir les sorties à zéro.

$$y_i(t) = h_i(t) = 0 \quad \forall t \geq t_0 \quad 1 \leq i \leq m \quad (5.42)$$

L'application de (5.42) sur (5.40) donne :

$$\begin{aligned} \dot{z}_i^1 = \dot{z}_i^2 = \dots = \dot{z}_i^{r_i} &= 0 \quad 1 \leq i \leq m \\ \dot{z}_k &= p_k(z) + q_k(z)D^{-1}(-b) \quad r+1 \leq k \leq m, \quad r+1 \leq j \leq n \\ z_k(0) &= z_0 \quad (\text{conditions initiales}) \end{aligned} \quad (5.43)$$